ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————–o0o——————–

TRẦN THỊ THU HOÀI

TÍNH MINIMAX VÀ TÍNH COFINITE CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

——————–o0o——————–

TRẦN THỊ THU HOÀI

TÍNH MINIMAX VÀ TÍNH COFINITE CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 8 46 01 04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. Nguyễn Văn Hoàng

THÁI NGUYÊN, NĂM 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi xin cam đoan mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 08 năm 2018

Tác giả

Trần Thị Thu Hoài

Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của cán bộ hướng dẫn khoa học

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành vào tháng 04/2018 dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Hoàng. Tôi xin được bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, những bài học quý giá từ trang giấy và cả những bài học trong cuộc sống thầy dạy giúp tôi tự tin hơn và trưởng thành hơn nhiều.

Tôi xin cảm ơn Phòng Đào Tạo - Đại học Sư Phạm Thái nguyên đã tạo điều kiện để tôi hoàn thành sớm khóa học.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới tất cả các thầy cô ở Đại học Thái Nguyên và các thầy ở Viện toán với những bài giảng đầy nhiệt thành và tâm huyết, xin cảm ơn các thầy cô đã luôn quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, tạo điều kiện cho tôi tham gia các buổi seminar và các lớp học ngoài chương trình.

Tôi xin cảm ơn tất cả các anh, em và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi nhiệt tình trong quá trình học và làm luận văn.

Tôi xin được gửi cảm ơn tới tất cả thành viên trong gia đình đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mục lục

Mở đầu

Cho R là vành giao hoán Noether (có đơn vị), I là một iđêan của R và M là R - môđun khác 0. Với mỗi số nguyên không âm i cho trước, ta có môđun đối đồng điều địa phương thứ i của M đối với giá là iđêan I được định nghĩa bởi A. Grothendieck (xem [11] hoặc [8]) như sau:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{n\geq 1} \operatorname{Ext}_R^i(R/I^n, M).$$

Các tính chất cơ bản về lớp môđun đối đồng điều địa phương có thể xem thêm trong cuốn sách [8].

Một định lý quan trọng trong đối đồng điều địa phương là "Nguyên lý địa phương - toàn cục cho chiều hữu hạn của các môđun đối đồng điều địa phương" (xem [10, Định lý 1] - bài báo của G. Faltings) phát biểu: "Với một số nguyên dương r đã cho, các $R_\mathfrak{p}$-môđun $H^i_{IR_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ là hữu hạn sinh với mọi $i \leq r$ và mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ nếu và chỉ nếu các R-môđun $H_I^i(M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \leq r$".

Có một dạng trình bày khác cho phát biểu của nguyên lý địa phương - toàn cục của Faltings mà ta quan tâm ở đây, liên quan đến sự khái quát hóa chiều hữu hạn $f_I(M)$ của M đối với I, trong đó

$$f_I(M) := \inf\{i \in \mathbb{N} \mid H_I^i(M) \text{ không là hữu hạn sinh}\}, \tag{†}$$

ở đây ta quy ước rằng $\inf(\emptyset) = \infty$. Khi đó

$$f_I(M) := \inf\{i \in \mathbb{N} \mid I \nsubseteq \sqrt{0 :_R H_I^i(M)}\ \ \}$$

$$= \inf\{i \in \mathbb{N} \mid I^n H_I^i(M) \neq 0 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}\};$$

đồng thời lúc đó nguyên lý địa phương - toàn cục của Faltings được cho ở công thức sau đây:

$$f_I(M) = \inf\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R\}$$

$$= \inf\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/IM) \text{ và } \dim R/\mathfrak{p} \geq 0\},$$

(xem [8, 9.6.2]). Nguyên lý này chỉ ra mối liên hệ giữa chỉ số đầu tiên mà các môđun đối đồng điều địa phương với giá là iđêan bất kì không hữu hạn sinh và chỉ số đó cho các môđun đối đồng điều khi chuyển qua địa phương hóa tại các iđêan nguyên tố trên vành cơ sở.

Năm 2013, Bahmanpour-Naghipour-Sedghi (xem [4]) đã giới thiệu khái niệm *chiều hữu hạn bậc n của M đối với I* kí hiệu là $f_I^n(M)$, được xác định bởi công thức:

$$f_I^n(M) = \inf\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/IM) \text{ và } \dim(R/\mathfrak{p}) \geq n\}. \qquad (\star)$$

Chú ý rằng $f_I^n(M)$ là số nguyên dương hoặc là ∞ và ta có $f_I^0(M) = f_I(M)$. Từ đó một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là tìm hiểu tính chất của môđun đối đồng điều địa phương với chiều hữu hạn bậc 1, bậc 2 của M đối với I. Chẳng hạn các phát biểu sau đây

$$f_I^1(M) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid H_I^i(M) \text{ không là minimax}\} \text{ và}$$

$$f_I^2(M) = \inf\{i \in \mathbb{N} \mid H_I^i(M) \text{ không là Lasker yếu}\}$$

có đúng hay không? Kết quả chính của Bahmanpour-Naghipour-Sedghi trong bài báo [4] là trả lời cho hai câu hỏi trên. Cụ thể kết quả thứ nhất của họ đã chứng minh được rằng số nguyên i nhỏ nhất để $H_I^i(M)$ không là môđun minimax bằng với số $f_I^1(M)$ (xem Định lý 2.2.8); kết quả chính thứ hai của họ là chỉ ra rằng số nguyên i nhỏ nhất sao cho $H^i_I(M)$ không là môđun Lasker yếu bằng với $f^2_I(M)$ khi R là vành nửa địa phương (xem Định lý 3.2.3).

Công cụ để họ chứng minh kết quả chính thứ nhất nêu trên là định lý sau đây:

Định lý 1. ([4, Định lý 1.1]) *Cho R là vành Noether, I là một iđêan của R và M là một R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó R-môđun $H^i_I(M)$ là minimax và I-cofinite với mọi $i < f^1_I(M)$ và $H^{f^1_I(M)}_I(M)$ không là minimax. Hơn nữa, với mỗi môđun con minimax N của $H^{f^1_I(M)}_I(M)$, thì R-môđun $\mathrm{Hom}_R(R/I, H^{f^1_I(M)}_I(M)/N)$ là hữu hạn sinh.*

Khái niệm môđun I-cofinite trong định lý trên được giới thiệu bởi R. Hartshorne năm 1970 (xem [12]) và được định nghĩa như sau: R-môđun M được gọi là *I-cofinite* nếu $\mathrm{Supp}(M) \subseteq V(I)$ và $\mathrm{Ext}^i_R(R/I, M)$ là hữu hạn sinh với mọi $i \geq 0$.

Một trong các công cụ để chứng minh kết quả chính thứ hai của Bahmanpour-Naghipour-Sedghi [4] là định lý dưới đây:

Định lý 2. ([4, Định lý 1.2]) *Cho R là vành Noether, I là iđêan của R, M là một R-môđun hữu hạn sinh và $t \geq 1$ là một số nguyên sao cho các R-môđun $H^0_I(M), \ldots, H^{t-1}_I(M)$ là hữu hạn sinh địa phương với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M/IM)$ mà $\dim(R/\mathfrak{p}) > 1$. Khi đó, các R-môđun $H^i_I(M)$ là I-cofinite với mọi $i \leq t$ và R-môđun $\mathrm{Hom}_R(R/I, H^t_I(M))$ là hữu hạn sinh.*

Từ những kết quả trên Bahmanpour-Naghipour-Sedghi [4] đã đưa ra các hệ quả của định lý 2, đó là một số mở rộng cho các kết quả của Bahmanpour-Naghipour trong [7], Delfino-Marley trong [9] và K. I. Yoshida trong [19] đối với một vành Noether tùy ý.

Định lý 3. [4, Định lý 1.3] *Cho R là một vành Noether, I là iđêan của R, M là R-môđun hữu hạn sinh sao cho* $\dim(M/IM) \leq 1$. *Khi đó R-môđun $H_I^t(M)$ là I-cofinite với mọi số nguyên.*

Một kết quả chính khác nữa trong bài báo [4] đó là: *Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether đầy đủ, I là một iđêan của R và M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó các R-môđun $\operatorname{Ext}_R^j(R/I, H_I^i(M))$ là Lasker yếu với mọi $i < f_I^3(M)$ và với mọi $j \geq 0$. Hơn nữa, với mỗi môđun con Lasker yếu N của $H_I^{f_I^3(M)}(M)$, thì ta có R-môđun $\operatorname{Hom}_R(R/I, H_I^{f_I^3(M)}(M)/N)$ cũng là Lasker yếu* (xem Định lý 3.2.6).

Từ các kết quả nghiên cứu đã thu được của Bahmanpour-Naghipour-Sedghi như trên đây, đều đưa đến bài toán xem xét với điều kiện nào để cho tập hợp $\operatorname{Ass}_R(H_I^i(M))$ là hữu hạn khi $i = f_I^j(M)$ (chẳng hạn với $j = 1, 2, 3$).

Mục đích chính của luận văn này là trình bày lại chi tiết các kết quả như đã nêu trên, các kiến thức này dựa trên bài báo chính là bài báo [4]: K. Bahmanpour, R. Naghipour and M. Sedghi, *Minimaxness and Cofinite properties of local cohomology modules*, Communications in Algebra, Vol. 41 (2013), Pp. 2799-2814. (DOI: 10. 1080/00927872.2012.662709). Bên cạnh đó để việc trình bày được đầy đủ và rõ ý hơn, luận văn tham khảo thêm nhiều kiến thức ở bài báo [5], [6], [7], [17],...; và các cuốn sách [8] và [15].

Luận văn được bố cục làm ba chương. Chương 1 trình bày những kiến thức cơ sở cần thiết để trình bày chứng minh các nội dung chính của luận văn. Chương 2 trình bày về chiều hữu hạn bậc 1 của môđun M đối với iđêan I trong mối liên hệ với tính chất minimax của môđun. Chương 3 của luận văn tập trung trình bày về chiều hữu hạn bậc 2 của M đối với iđêan I và tính chất Lasker yếu của môđun.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Ở chương này ta luôn giả thiết R là vành giao hoán có đơn vị. Các kiến thức ở chương này được trình bày dựa vào các cuốn sách [8] và [15].

1.1 Iđêan nguyên tố liên kết

Định nghĩa 1.1.1 (Iđêan nguyên tố liên kết)**.** Cho M là R-môđun, $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của vành R. Khi đó $\mathfrak{p}$ được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại một phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$. Tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\mathrm{Ass}_R(M)$ hoặc $\mathrm{Ass}(M)$.

Định nghĩa 1.1.2 (Đa tạp của iđêan)**.** Cho I là một iđêan của R, khi đó *đa tạp* của I được kí hiệu là $V(I)$ được định nghĩa bởi

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Mệnh đề 1.1.3. *Cho M là R-môđun và I là một iđêan của R. Khi đó ta có*

i) $\mathrm{Ass}_R(0 :_M I) = \mathrm{Ass}_R(M) \cap V(I)$.

ii) $\mathrm{Ass}_R(M/(0 :_M I)) \subseteq \mathrm{Ass}_R(M)$.